Roland Fischer, Klagenfurt

GEOMETRIE DER TERME ODER ELEMENTARE ALGEBRA VOM VISUELLEN STANDPUNKT AUS

Der vorliegende Aufsatz geht von folgender These aus:

> Die elementare Algebra kann weitgehend als eine Visualisierung der Beziehungen zwischen variablen Größen mit der Möglichkeit der operativen Umgestaltung von Visualisierungen aufgefaßt werden.

In der Regel werden nämlich in der elementaren Algebra Formeln bzw. Gleichungen aufgeschrieben, womit Abhängigkeiten dargestellt werden. Diese Darstellungen werden dann gegebenenfalls umgeformt. Wir wollen in diesem Zusammenhang das Visualisieren als substantiellen (konstitutiven) Bestandteil der Algebra auffassen und nicht als etwas bloß im Sinne der Darstellung Hinzukommendes - Algebra ist diese Darstellung.

Die "visuelle Komponente" ist in der Algebra natürlich immer schon wichtig gewesen und Mathematiklehrer wissen das auch. Wenn es etwa um eine Umformung des Terms

$$(x+3y)^2$$

geht, muß man sehen, daß dabei die Regel

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

angewendet werden kann; oder bei der Zerlegung von

$$16c^2-9d^2$$

oder, wenn man

$$\sin^2 x+3\sin x-2 = 0$$

als quadratische Gleichung in sinx erkennen soll. Immer kommt es darauf an, richtig zu sehen.

Manche Schwierigkeiten von Lernenden in der elementaren Algebra hängen dann auch damit zusammen, daß nicht richtig gesehen wird, d.h. die Struktur von Termen nicht erkannt wird. Im Rahmen eines Algebra-Tests wurde folgende Aufgabe 56 Schülern aus fünften oder sechsten Klassen gestellt:

Berechne aus

$$a = \frac{b}{1+cd}$$

der Reihe nach die Größen b,c und d!

Diese m.E. für die Praxis wichtigste Aufgabe des Tests hat deutlich schlechter abgeschnitten als andere Aufgaben, bei denen die Termstruktur z.T. komplizierter war, die aber häufiger in den Lehrbüchern vorkommen, wie z.B. die Gleichung

$$\frac{x}{x-2} - \frac{x+1}{x+2} = \frac{5}{x^2-4}$$

Bei der oben genannten Aufgabe sind u.a. folgende Fehler vorgekommen, die auf eklatante Schwächen im Erkennen von Termstrukturen schließen lassen:

$$a = \frac{b}{1+cd} \Longrightarrow \frac{a}{b} = 1+cd$$

oder

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{1+cd} \Longrightarrow \frac{a}{b} = c \wedge \frac{a}{b} = d \Longrightarrow c = d$$

oder

$$a = \frac{b}{1+cd} \quad \Big| \cdot 1+c \qquad \text{oder} \qquad a = \frac{b}{1+cd} \quad \Big| -cd$$

$$a+ac = \frac{b}{d} \qquad\qquad a-cd = \frac{b}{1}$$

oder

$$1+cd = \frac{b}{a}$$

$$1+c = \frac{b}{ad}$$

usw. Hier werden Regeln angewendet, ohne daß die Struktur des Termes beachtet wird, weil sie einfach nicht gesehen wird. (Oft werden additive und multiplikative Strukturanteile durcheinandergebracht.)

Meistens wird im Unterricht auch wenig getan, um das Sehen von Termen gezielt zu schulen. In den Schulbüchern sind diesbezüglich wenig Anregungen zu finden. Eine Ausnahme bildet das Arbeitslehrbuch "Mathematik in unserer Welt", Band 3, von W. FLICK, in dem vor allem mit Hilfe von farblichen Unterlegungen das Erkennen von Termstrukturen erleichtert werden soll. Z.B. sind dort auf Seite 66 folgende Aufgaben zu finden:

$3\boxed{(a+4)} + \boxed{(a+4)} + 5\boxed{(a+4)} =$ ____________ $\boxed{}$ = blau

oder

$5\boxed{(abc+1)} + 6\boxed{(abc+2)} + 3\boxed{(abc+1)} - 4\boxed{(abc+2)} =$ ____________ $\boxed{}$ = grau

In neueren deutschen Lehrbüchern gibt es zwar eine große Menge von Visualisierungen in der elementaren Algebra, diese beziehen sich aber nicht direkt auf Terme, die "Hauptvisualisierung" von Beziehungen zwischen Größen. Eher sind es Rechenbäume, Flußdiagramme, Operatorpfeile, Termmaschinen usw. (ziemlich viel in WINTER - ZIEGLER, Neue Mathematik 7,8). Die (übliche) mathematische Symbolsprache wird offenbar als "unanschaulich" angesehen, veranschaulicht wird durch alternative Darstellungsformen. Damit wird einerseits ein wichtiger Aspekt von Mathematik nicht genützt - Mathematik ist Visualisierung - andererseits wird damit für die "übliche" Darstellungsform, mit der man dann doch hauptsächlich zu tun hat, eben fast nichts gelernt. Untersuchungen haben übrigens ergeben, daß zusätzliche Veranschaulichungen wie Additions- und Subtraktionsdiagramme wenig effizient sind, da sie von den Schülern wie zusätzliche Inhalte gelernt werden müssen.[1)]

Ein Grund, warum die Anschauung in der Algebra so wenig gezielt gefördert wird, liegt m.E. in einer übertriebenen Betonung des Operativen. Wir wissen zwar, daß es zur Differentiation der Funktion

$$x \mapsto \sqrt{1+x^2}$$

nötig ist, zunächst zu sehen, daß hier eine Verkettung vorliegt, als das eigentlich Mathematische wird aber das anschließende Anwenden der Kettenregel angesehen. Ähnlich ist es in der "höheren" Mathematik, wenn etwa Beweise geführt werden: zunächst muß man etwas Sehen, dann kann man erst Umformungen durchführen. Dennoch wird auch hier die Operationskette - als der sichtbare Erfolg des Sehens - als das Entscheidende angesehen. Es liegt hier m.E. eine Betonung einer "aktionistischen" gegenüber einer "kontemplativen" Seite von Mathematik vor. Es geht mir darum, auch die kontemplative Seite etwas gezielter zu fördern. (Ein berühmter Mathematiker soll einmal gesagt haben: Um ein kompliziertes Integral zu lösen, muß man es so lange ansehen, bis man eine Lösung gefunden hat.)

---

1) Vgl. dazu W. SCHIPPER, Stoffauswahl und Stoffanordnung im mathematischen Anfangsunterricht. Journal für Mathematik-Didaktik 3 (1982), Heft 2, Seite 106 ff.

Die o.g. "Zusatzveranschaulichungen" zur Algebra haben übrigens alle "statischen" Charakter in dem Sinn, daß mit ihnen keine Operationen durchgeführt werden können. Es scheint so, als ob Anschaulichkeit dort, wo auch Operation möglich ist, durch letztere "erschlagen" wird.[1)]

Es ist m.E. nicht uninteressant, zu bemerken, daß der visuelle Aspekt im Sprechen über Mathematik auch in der sogenannten "höheren Mathematik" durchaus vorhanden ist, wenn er auch im Formalismus der Objektsprache eher zurückgedrängt wird. Man sagt etwa: "Dieser Term ist quadratisch", "Dieser ist wichtig", "Jener kann vernachlässigt werden" und deutet auf die jeweiligen (Teil-) Terme hin. Andererseits ist es verpönt, ein lineares Gleichungssystem als eines "der Form"

$$\begin{aligned} ax+by &= c \\ dx+ey &= f \end{aligned}$$

zu definieren, sondern man benützt dazu lineare Abbildungen, die wiederum durch Funktionalgleichungen definiert werden und nicht dadurch, wie sie angeschrieben werden. Ein noch simpleres Beispiel: Ein (geordnetes) Paar aus den Elementen a und b ist nicht einfach ein "Gebilde" der Form (a,b), sondern die Menge $\{\{a\}, \{a,b\}\}$. Im Sinne wissenschaftlicher Exaktheit findet diese Vorgehensweise ihre Begründung: Anschauliches ist zu wenig präzise.

Wie bereits oben erwähnt geht es nicht darum, hier etwas prinzipiell Neues zu kreieren, sondern darum, etwas, das immer schon von Bedeutung war in der elementaren Algebra, eben die visuelle Komponente, besser zu explizieren und in das Bewußtsein zu heben sowie ein gezieltes Training vorzuschlagen.

Im folgenden sollen konkrete Hinweise zur verstärkten Schulung des Sehens von Formeln angeboten werden. Diese stehen in Zusammenhang mit zwei grundlegenden Lernzielen der Elementaren Algebra, von denen zumindest das erste m.E. häufig vernachlässigt wird:

- Formeln verstehen: Was sagen sie aus, welche Zusammenhänge sind durch sie gegeben?
- Formeln umformen: Wie kann man diese Zusammenhänge auch anders ausdrücken?

Die folgenden beiden Abschnitte entsprechen diesen Lernzielen.

----

1) Hinsichtlich weiterer grundsätzlicherer Erörterungen zur Frage der Visualisierung in der Mathematik vgl. R. FISCHER, Offene Mathematik und Visualisierung (erscheint in mathematica didactica 1984), und M. OTTE, Texte und Mittel (Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 15 (1983), Heft 4, Seite 183 - 194).

Analyse von Formeln

Beziehungen zwischen Größen sind oft durch "Formeln" gegeben, d.s. Gleichungen der Gestalt

$$\text{Variable} = \boxed{}$$

Hier bedeutet $\boxed{}$ irgendeinen Term. Es hat sich übrigens als nützlich erwiesen, für (Teil-) Terme generell das Symbol "$\boxed{}$" zu verwenden, auch wenn in einem Ausdruck damit verschiedene Terme gemeint sein können (was einer grundlegenden Konvention der algebraischen Formalsprache widerspricht). Also etwa:

$$V = \frac{\square + \square}{\square}$$

Außerdem wird häufig "V" zur Bezeichnung einer bestimmten, eben betrachteten, Variablen verwendet.

Es geht im folgenden um eine Schulung des Sehens von Formeln. Formeln werden im Algebraunterricht im allgemeinen nur zu dem Zweck angesehen, eine Umformungsmöglichkeit zu erkennen. Dann hat man schon die nächste Formel usw. Will man das Sehen von Formeln lernen, so muß man länger verweilen, man muß eine Formel länger betrachten. Ziel dieser Betrachtung darf nicht nur eine Umformung sein, es müssen auch andere Ziele möglich sein.

Die hier gemeinte Analyse von Formeln läuft im wesentlichen auf das Erkennen der Struktur von Termen hinaus. Dabei ist wichtig, daß eine solche Analyse bzw. Strukturerkennung immer von bestimmten Gesichtspunkten ausgehen muß, d.h. man hat bestimmte Fragestellungen oder Vergleichsstrukturen "im Hinterkopf". Man analysiert nicht "einfach so".

Konkret schlage ich folgende Fragestellungen vor:

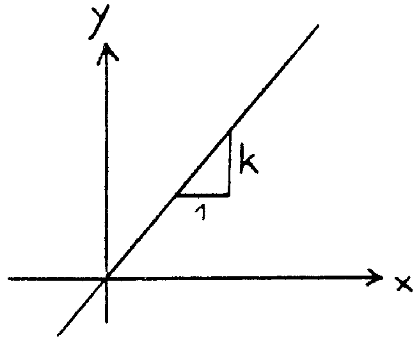
- Welche ist die "letzte Operation" in dem Term, d.h. handelt es sich um einen Summen-, Differenz-, Produkt- oder Quotiententerm?
- Wie sehen die Teilterme aus? (Top-down-Analyse, evt. mit Hilfsvariablen)
- Welche Abhängigkeit besteht bezüglich der einzelnen Größen (insbesondere hinsichtlich Monotonie)?
- Welcher Funktionstypus besteht bezüglich der einzelnen Größen (proportional, linear, indirekt proportional; später: quadratisch, polynomial, exponentiell, logarithmisch, ...)? Diese Frage kann auch bezüglich Teilterme gestellt werden.
- Wie sieht ein Berechnungsschema aus (etwa als Flußdiagramm)?

Das Gesagte soll nun anhand einer Beispielsequenz illustriert werden. In der Sequenz wird mit der Erklärung einiger einfacher Funktionstypen begonnen. Das

Erklärte wird dann auf komplexere Formeln angewandt. Als Ergänzung zur algebraischen Visualisierung werden auch Visualisierungen mit Hilfe cartesischer Diagramme verwendet. Die Beispielsequenz könnte in einer dritten oder vierten Klasse behandelt werden.[1)]

<u>Proportionalität:</u>

y hängt von x
proportional ab,
falls
$y = k.x$
gilt.



Allgemein sieht die rechte Seite so aus:

$\square \, . \, V$ oder $V \, . \, \square$

↑ hier kommt die Variable nicht vor

<u>Beispiele:</u>

$a = c.d$	$c \mapsto a$
$r = 2(x+y).z$	$z \mapsto r$
$x = ay-by$	$y \mapsto x$
$u = \frac{r}{a+b}$	$r \mapsto u$

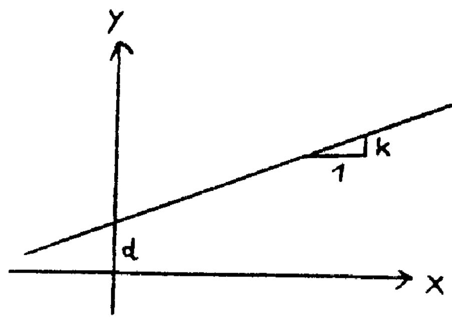
<u>Gegenbeispiele:</u>

$a = c+d$ $c \mapsto a.$

$x \mapsto r$
$b \mapsto x$
$a \mapsto u$
} bezüglich linksstehender Formel

<u>Lineare Funktion:</u>

$y = k.x+d$



Allgemein (rechte Seite):

$\square \, . \, V + \square$ oder $V \cdot \square + \square$ oder

↑ hier kommt ↑ die Variable nicht vor

----

1) Diese Beispielsequenz wie auch der darauf folgende Abschnitt über das Umformen von Formeln könnte an einen Lehrgang zur Einführung von Variablen unter Betonung des "Gegenstandsaspekts" anschließen wie er im folgenden Skriptum dargestellt ist: Didaktische Fragen zur Elementaren Algebra. Skriptum zur Lehrerfortbildung. Von G. MALLE u.a. Universität für Bildungswissenschaften Klagenfurt 1982

$\square + \square \cdot V$ oder $\square + V \cdot \square$

(Diese Unterscheidung wird üblicherweise kaum vorgenommen!)

<u>Beispiele:</u>

$z = u+vt \qquad v \mapsto z$

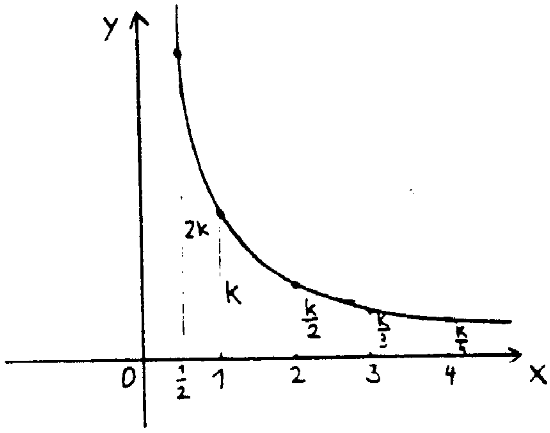
$a = (r+s)t-u.v \quad t \mapsto a$

usw. ....

Gegenbeispiele!

<u>Indirekte Proportionalität</u>

$y = \frac{k}{x}$



Allgemein (rechts Seite):

$\frac{\square}{V}$ hier kommt die Variable nicht vor

oder $\square : V$

oder $\square \cdot \frac{1}{V}$

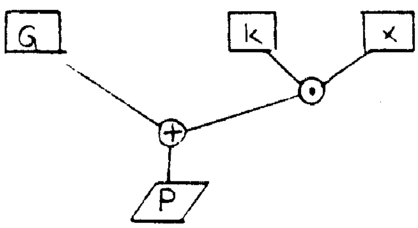
Beispiele, Gegenbeispiele!

<u>Strompreis-Formel</u>

$P = G+k.x$

G ... Grundgebühr
k ... Preis pro KWStd
x ... Anzahl der KWStd

- P ist die <u>Summe</u> zweier Terme, $P = \square + \square$ nämlich G und k.x. Der zweite Term, nennen wir ihn V, also $V = k.x$, ist wieder zusammengesetzt. Es ist V das Produkt aus k und x. Was bedeuten G und V?
- Ein Berechnungsschema für diese Formel sieht so aus:

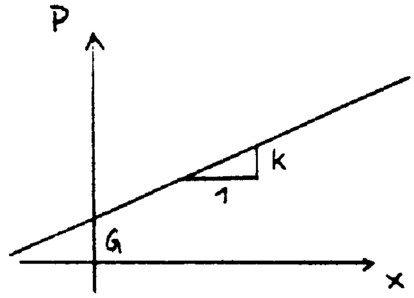


- Abhängigkeit des P von den einzelnen Größen:
- wenn x zunimmt, dann nimmt auch P zu
- wenn G zunimmt, dann nimmt auch P zu
- wenn k zunimmt, dann nimmt auch P zu

  Genauer:
  - Wenn G um 1 zunimmt, dann nimmt auch P um 1 zu
  - Wenn x um 1 zunimmt, dann nimmt P um k zu
  - Wenn k um 1 zunimmt, dann nimmt P um x zu

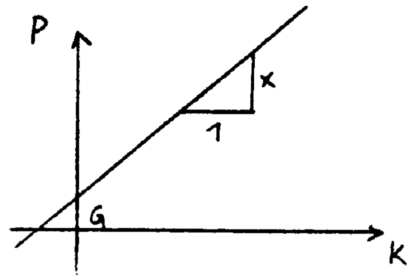
- P hängt von x <u>linear</u> ab, denn:

$$P = \underset{G}{\boxed{}} + \underset{k}{\boxed{}}.x$$



P hängt von k <u>linear</u> ab, denn

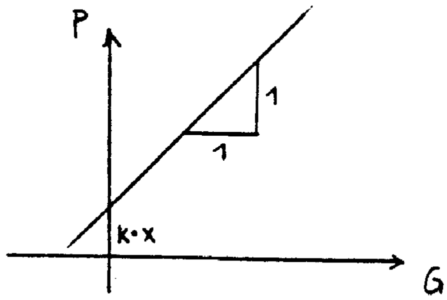
$$P = \underset{G}{\boxed{}} + k.\underset{x}{\boxed{}}$$



P hängt von G linear ab, denn

$$P = G.\overset{1}{\boxed{}} + \overset{k\cdot x}{\boxed{}}$$

(Steigung = 1)



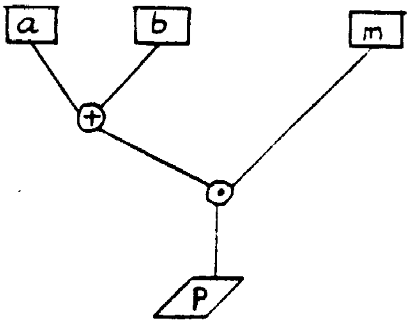
<u>Gesamtpreis einschließlich Mehrwertsteuer</u>

$P = (a+b).m$

a ...	Nettopreis der ersten Ware
b ...	Nettopreis der zweiten Ware
m ...	Mehrwertsteuerfaktor ($= 1 + \frac{p}{100}$)

- P ist das <u>Produkt</u> zweier Terme, $P = \boxed{} \cdot \boxed{}$, nämlich von a+b und m. Der erste Term, nennen wir ihn N, ist wieder zusammengesetzt. Es ist N die Summe aus a und b

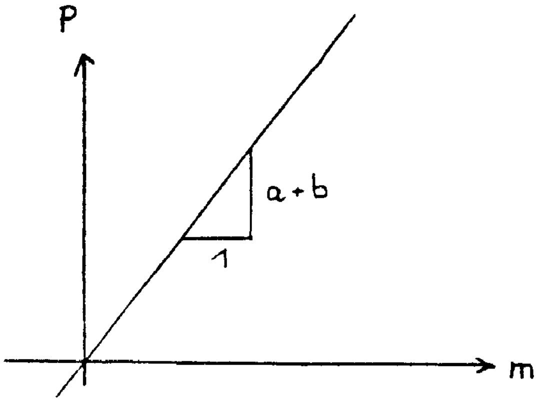
. Berechnungsschema:



. Wenn a zunimmt,
Wenn b zunimmt,
Wenn m zunimmt,
} dann nimmt auch P zu

. P ist bezüglich m eine Proportionalität, denn:

$P = \underbrace{\boxed{}}_{(a+b)} \cdot m$



. Um zu sehen, wie P mit a bzw. b zusammenhängt, lösen wir die Klammer auf:

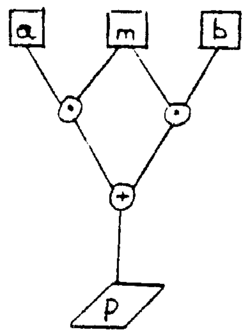
$P = a.m + b.m.$

P ist bezüglich a linear, denn:

$P = a.\underbrace{\boxed{}}_{m} + \underbrace{\boxed{}}_{b.m}$

Ebenso: P ist bezüglich b linear.

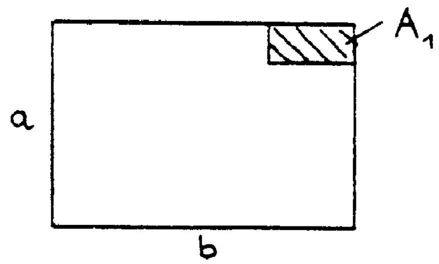
Neues Berechungsschema:



. Wie sieht die Angelegenheit aus, wenn man $m = 1 + \frac{p}{100}$ berücksichtigt?

Flächeninhalt einer Wohnung

$A = a.b - A_1$



- A ist die Differenz zweier Terme, nämlich ....
- Berechnungsschema!
- Wenn a zunimmt, $\left.\right\}$ dann nimmt A zu.
  Wenn b zunimmt,

  Wenn A_1 zunimmt, dann nimmt A ab.
- A hängt von a,b,A_1 jeweils linear ab, keine Proportionalität.

Analog:

$A = A_1 - cd$

$A = ab - cd$

Flächeninhalt eines Trapez

$A = \frac{a+c}{2} . h$

Andere Möglichkeiten, dies anzuschreiben:

$A = \frac{1}{2}(a+c) . h$ $\qquad$ $A = \frac{1}{2}(ah+ch)$

$A = (\frac{a}{2} + \frac{c}{2}) . h$ $\qquad$ $A = \frac{a}{2} . h + \frac{c}{2} . h$

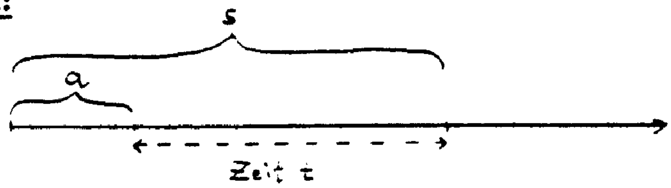
$A = (a+c) . \frac{h}{2}$ $\qquad$ $A = a . \frac{h}{2} + c . \frac{h}{2}$

$A = \frac{(a+c) . h}{2}$ $\qquad$ $A = \frac{ah+ch}{2}$

A hängt von allen Größen linear ab (welche Steigungen?), von h sogar proportional.

Zeit aus Weg und Geschwindigkeit:

$$t = \frac{s-a}{v}$$



- o t ist der Qutotient zweier Terme, nämlich von s-a und v.
- o Je größer s, desto größter t
  Je größer a,v, desto kleiner t
- o t hängt von s,a linear (nicht proportional) ab.
  t hängt von v indirekt proportional ab, da

$$t = \frac{\boxed{} \leftarrow s-a}{v}$$

Den bisherigen Beispielen ist gemeinsam, daß die angegebenen Formeln jeweils mit einer bestimmten realen Bedeutung verbunden sind. Für weitere Übungen zur Analyse von Formeln kann man sich natürlich davon lösen. Zu beachten ist dabei jedoch, daß die Komplexität der Terme beschränkt bleibt. In der 4. Klasse könnte man etwa mit Termen der Gestalt

$$\frac{\boxed{} \pm \boxed{}}{\boxed{} \pm \boxed{}} \pm \boxed{}$$

wobei $\boxed{}$ jeweils ein Produkt von höchstens zwei Variablen ist, das Auslangen finden. Schwierigkeiten, die durch das mehrfache Auftreten von Variablen begründet sind, sollten leicht behebbar sein (Distributivgesetz). Möglicherweise kann es sinnvoll sein, noch den Funktionstyp

$$V \mapsto \frac{\boxed{}}{\boxed{} \pm \boxed{} \cdot V}$$

einzuführen.

Zur Klarstellung: Die angebotenen Beispiele sind natürlich nicht neu. Worauf es mir ankommt, ist das Sehen von Formeln, das Erkennen von Termstrukturen. Um dies zu lernen sollen verschiedene Dinge hilfreich sein:

- o Geeignete Fragestellungen,
- o neue Darstellungsformen, die die (visuelle) Struktur von Termen deutlicher hervortreten lassen,
- o Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungsformen (Term-Notation sowie cartesische Diagramme, Flußdiagramme, geometrische Skizze usw.)
- o Betonung der Eigenständigkeit unterschiedlicher Termdarstellungen.

Umformen von Formeln

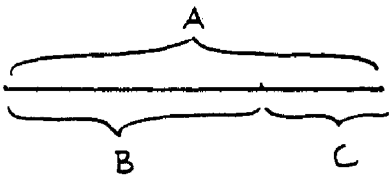
In diesem Abschnitt soll ein Lehrgang skizziert werden, der auf das Umformen einfacher Formeln abzielt (etwa auf dem Niveau der oben zitierten Testaufgabe). Ausgangspunkt ist die folgende Feststellung:

> Beziehungen zwischen Größen können im allgemeinen auf verschiedene Arten durch Gleichungen ausgedrückt werden.

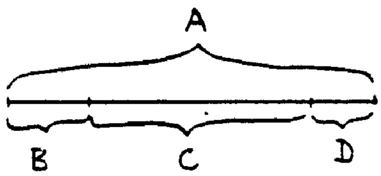
Additive Umformungen

Die folgenden Umformungen können im Zusammenhang mit der geometrischen Interpretation der Beziehung sogar Volksschülern verständlich gemacht werden.

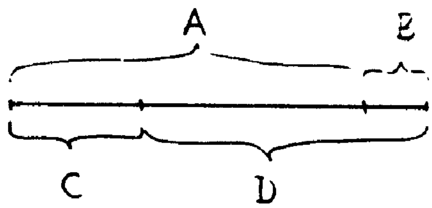
$$\left.\begin{aligned} A &= B+C \\ B &= A-C \\ C &= A-B \\ A-B-C &= 0 \end{aligned}\right\}$$



$$\left.\begin{array}{ll} A = B+C+D & A-B = C+D \\ B = A-C-D & A-C = B+D \\ C = A-B-D & A-D = B+C \\ D = A-B-C & A-B-C-D = 0 \end{array}\right\}$$



$$\left.\begin{array}{ll} A+B = C+D & A-D = C-B \\ A+B-C = D & A-C = D-B \\ A+B-D = C & A+B-C-D = 0 \\ A = C+D-B & \\ B = C+D-A & \end{array}\right\}$$



Alle diese Umformungen lassen sich mit dem "Streckenmodell" deuten. Man erkennt jedoch auch bald die formale Gemeinsamkeit: "Auf die andere Seite bringen" ändert das Vorzeichen.

Analog: Multiplikative Umformungen

Nicht so elementar zu veranschaulichen sind die analogen multiplikativen Umformungen.

$$\left.\begin{array}{l} A = B.C \\ B = \frac{A}{C} \end{array}\right\} \quad \begin{tikzcd} B \arrow[r, bend left, "\cdot C"] & A \arrow[l, bend left, ": C"] \end{tikzcd}$$

$$C = \frac{A}{B}$$

$$\left.\begin{array}{l} B = \frac{A}{C} \\ C = \frac{A}{B} \end{array}\right\} \quad \begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left, "\cdot B"] & A \arrow[l, bend left, ": C"] \end{tikzcd}$$

Die "Berechtigung" ergibt sich aus der Definition der Division. Die Veranschaulichung ist von abstrakterer Art als bei der Addition. Es hat auch nicht viel Sinn, sie bei Umformungen der folgenden Art zu verwenden:

$A = B.C.D$	$A.B = C.D$
$B = \frac{A}{C.D}$	$A = \frac{C.D}{B}$
$C = \ldots$	$B = \frac{C.D}{A}$
usw.	usw.

Daß es für die multiplikativen Umformungen keine so "schöne" Veranschaulichung wie bei den additiven Umformungen gibt, wird von manchen Lehrern als störend empfunden. Diese versuchen dann eine "einheitliche" Visualisierung zu finden, die "durchgezogen" werden kann. Dies entspricht zwar dem zwanghaften Charakter mancher didaktischen Bestrebungen, es verhindert jedoch ein lockeres Umgeben mit Darstellungsmöglichkeiten. Außerdem: Die gesuchte "einheitliche" Darstellungsweise ist ja gerade die übliche algebraische Notation! Diese wäre überflüssig, wenn es eine andere gäbe.

Die Methode der Elementarumformungen

Die beiden Umformungen

$$A+B = C \quad \Longleftrightarrow \quad A = C-B$$

und

$$A.B = C \quad \Longleftrightarrow \quad A = \frac{C}{B}$$

nenne ich additive bzw. multiplikative Elementarumformungen. Ihre "Berechtigung" ergibt sich allgemein aus der Defintition der Subtraktion bzw. der Division. Diese Elementarumformungen ermöglichen m.E. einen Zugang zu Gleichungen, der einmal mit dem "üblichen" verglichen werden sollte. Unter dem "üblichen" meine ich jenen, nach dem festgestellt wird: Man darf auf beiden Seiten einer Gleichung dasselbe addieren, subtrahieren, multiplizieren etc. Bei diesen Regeln wird nämlich nichts darüber ausgesagt, was addiert bzw. subtrahiert etc. werden soll, bzw. was eine solche Addition etc. bewirkt. Diese Regeln sind neutral gegenüber dem jeweiligen Term. Dagegen nehmen die Elementarumformungen Bezug auf die Termstruktur. Bei ihrer Verwendung ist der folgende Fehler kaum denkbar:

$$\frac{3}{5-x} = 2 \quad \Big| +x$$

$$\frac{3}{5} = 2+x$$

Bei der "Methode der Elementarumformungen" muß man zuerst die "Termstruktur" erkennen:

$$\frac{3}{5-x} = 2$$

$$\frac{A}{B} = C,$$

und schließt dann

$$A = C.B, \text{ also}$$

$$3 = 2.(5-x)$$

usw. Auch für kompliziertere Gleichungen erscheint mir dieser Weg durchaus geeignet:

$$\frac{1}{x-1} = \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x^2-1} \qquad \frac{A}{B} = C \Longrightarrow A = B.C$$

$$1 = (x-1)\left(\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x^2-1}\right)$$

$$1 = \frac{2x-2}{x+1} - \frac{3(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$1 = \frac{2x-2-3}{x+1} = \frac{2x-5}{x+1} \qquad A = \frac{B}{C} \longrightarrow A.C = B$$

$$x+1 = 2x-5 \qquad A+B = C \Longrightarrow B = C-A$$

$$1 = 2x-5-x = x-5 \qquad A = B-C \Longrightarrow A+C = B$$

$$6 = x$$

Es mag sein, daß bei komplizierteren Gleichungen bzw. bei Gleichungssystemen die Methode der Äquivalenzumformungen günstiger ist (Man kann natürlich auch die Regeln $A = B \Longrightarrow k.A = k.B$ bzw. $A = B \wedge C = D \Longrightarrow A+C = B+D$ hinzunehmen). Ich meine jedoch, daß für einen ersten Zugang zum Gleichungslösen die Methode der Elementarumformungen günstiger ist. Sie entspricht z.T. ohnedies dem praktischen Vorgehen ("Man bringt hinüber"), welches jedoch oft von einem theoretischen Standpunkt aus "verboten" wird.

Nach diesem Plädoyer für die "Methode der Elementarumformungen" zurück zur Frage: Wie kann ein darauf aufbauender Kurs aussehen?

Ausgehend von der Darstellung der Elementarumformungen anhand einfachster Beispiele (siehe oben) kommt man zu Umformungen komplizierterer Formeln. Diese können zunächst spielerisch, nicht zielgerichtet erfolgen. Wichtig ist dabei, jeweils "letzte Operationen" in den vorkommenden Termen zu erkennen.

Beispiel:

$$
\begin{array}{lcl}
r & = & a.x+b.x \\
\square & = & \square + \square \\
A & = & B + C \\
a.x & = & r-b.x \\
b.x & = & r-a.x
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lcl}
r & = & (a+b).x \\
\square & = & \square \cdot \square \\
A & = & B \,.\, C \\
a+b & = & \frac{r}{x} \\
x & = & \frac{r}{a+b}
\end{array}
$$

Hier wurde jeweils nur eine Elementarumformung durchgeführt (dazwischen das Distributivgesetz). Natürlich kann man auch mehrere hintereinander ausführen.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{a+c}{2}\,.\,h \\
2A &= (a+c)h \\
\frac{2A}{h} &= a+c \\
a &= \frac{2A}{h} - c
\end{aligned}
$$

usw.

Mehr oder minder zufällig landet man manchmal bei Gleichungen der Form

$x = \square \leftarrow$ hier kommt x nicht mehr vor

Man kann nun die Frage nach einer generellen Strategie zur "Isolierung" jeder gewünschten Variablen in einer Formel aufwerfen und erhält als (mögliche) Antwort:

- Bruchterme wegschaffen (multiplikative Elementarumformungen);
- alle Klammern auflösen (Distributivgesetz) - auf beiden Seiten stehen nun Summen bzw. Differenzen von Produkten:

  $$\square \pm \square \pm \square = \square \pm \square$$

- Terme mit der zu isolierenden Variablen (etwa x) auf eine Seite, die übrigen auf die andere Seite (additive Elementarumformungen):

  $$\square \cdot x \pm \square \cdot x \pm \square \cdot x = \square$$

- x "herausheben":

  $$x \cdot \square = \square$$

- multiplikative Elementarumformung.

Dies ist natürlich nur eine grobe Skizze eines Kurses in Umformen von Formeln bzw. Gleichungslösen, der auf der Methode der Elementarumformungen aufbaut. Er wäre im Detail weiter auszuarbeiten. Wesentlich erscheint mir, daß dabei der visuelle Standpunkt nicht übersehen (!) wird.

Zur Komplexität

Zum Abschluß ein Hinweis, der mir wichtig erscheint. Es war immer und ist allen Beteiligten (Lehrern, Schülern) klar, daß die Komplexität der Terme ein Faktor "sui generis" bei der Erzeugung von Schwierigkeiten in der Elementaren Algebra ist. Dieser wirkt sich beim "Abarbeiten" von Ausdrücken aus und wird oft als "fehlende Konzentrationsfähigkeit" des Schülers diagnostiziert, erst recht aber muß sich dieser Faktor auswirken, wenn es um das Erkennen von Termstrukturen geht, also um eine ganzheitliche Sichtweise des jeweiligen Ausdrucks. (Dieses Erkennen ist ja oft die Voraussetzung für das folgende "Abarbeiten".)

Obwohl also die Bedeutung des Faktors "Komplexität" offensichtlich zu sein scheint, sind die damit verbundenen Probleme in der didaktischen Diskussion kaum systematisch aufgegriffen worden. Die "Neue Mathematik" war von einer Betonung grundsätzlicher Aspekte ("Was sind Variable, Gleichungnen, Terme etc.?") gekennzeichnet. Der "anwendungsorientierte" Mathematikunterricht betonte - wiederum grundsätzlich - die Bedeutung von Variablen, Formeln und hob deren Sachbezug hervor. Man gewinnt den Eindruck, daß in der theoretischen Diskussion die Auffassung besteht, wenn man Algebra prinzipiell verstanden hat, dann beherrscht man sie auch in jeder beliebigen Komplexität. Dies trifft nicht einmal für Maschinen zu.

Neuere amerikanische Untersuchungen, insbesondere in Zusammenhang mit Fehleranalyse, lassen Ansätze einer systematischen Untersuchung von Komplexitätspro blemen erkennen.[1)] Sie gehen von einem Modell aus, in dem der "visuelle Standpunkt" eine wesentliche Rolle spielt.

----

1) Vgl. DAVIS, R.B. - JOKUSCH, E. - McKNIGHT, C.: Cognitive Processes in Learning Algebra. The Journal of Children's Mathematical Behavior. Vol. II. (1978) No 1